

23.05.2020

Harmonic progression
हरात्मक श्रेणी

जिन शक्तियों के व्युत्क्रम (Reciprocal) समानान्तर श्रेणी (A.P) में हों वे हरात्मक श्रेणी में कहलाती हैं।

उदाहरणार्थ : $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \dots$ H.P. श्रेणी में हैं।
क्योंकि $2, 5, 8, \dots$ A.P. श्रेणी में हैं।

- * A harmonic progression is a sequence of real numbers formed by taking the reciprocals of an arithmetic progression. Equivalently, it is a sequence of real numbers such that any term in the sequence is the harmonic mean of its two neighbours.
- * In mathematics, A harmonic progression (or harmonic Sequence) is a progression formed by taking the reciprocals of an arithmetic progression.
- * Equivalently, a sequence is a h.p. when each term is the harmonic mean of the neighboring terms. As a third equivalent characterization, it is an infinite sequence of the form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \dots$$

where a is not zero and $-a/d$ is not a natural number, or a finite sequence of the form,

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \dots, \frac{1}{a+kd}$$

where a is not zero, k is a natural number and $-a/d$ is not a natural number or is greater than k .

→ Sum of harmonic progression: —

- Infinite harmonic progression are not summable.
- It is not possible for a harmonic progression of distinct unit fractions (other than the trivial case where $a = 1$ and $k = 0$) to sum to an integer. The reason is that, necessarily, at least one denominator of the progression will be divisible by a prime number that does not divide any other denominator.

→ In mathematical view harmonic progression is three types.

(A) n term of A.H.P (हरात्मक श्रेणी का n वाँ पद)

यदि किसी हरात्मक श्रेणी का पहला पद a तथा दूसरा पद b हो तो n वाँ पद,

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + (n-1) \frac{a-b}{ab}} = \frac{ab}{b + (n-1)(a-b)} \text{ होगा, क्योंकि}$$

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \dots, \left[\frac{1}{a} + (n-1) \left(\frac{a-b}{ab} \right) \right]$ Arithmetic progression

यहाँ शर्क अन्तर (C.R) = $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$

Notes → n संख्याएँ समान श्रेणी तथा ह. श्रेणी में होती हैं यदि वे सब समान हों अर्थात् $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ सब श्रेणी के लिए $d = 0$ तथा गु. श्रेणी के लिए $r = 1$.

उदाहरणार्थ → $\frac{2}{9} + \frac{4}{17} + \frac{1}{4} + \dots$ का नववाँ (9) पद ज्ञात करें।

हल: → $\frac{17}{4} - \frac{9}{2} = \frac{17-18}{4} = -\frac{1}{4}$
 $-\frac{1}{4} - \frac{17}{4} = \frac{16-17}{4} = -\frac{1}{4}$
 $\therefore \frac{17}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{17}{4}$

उत्तर:

P.T.O

अतः $\frac{9}{2}, \frac{17}{4}, \frac{5}{1} \dots$ शून्य श्रेणी में है।

$$\begin{aligned} \therefore \text{शून्य श्रेणी का } n\text{वाँ पद} &= a + (n-1)d \\ &= \frac{9}{2} + (9-1)\left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{9}{2} - \frac{8}{4} = \frac{18-8}{4} \\ &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

\therefore हरात्मक श्रेणी $\frac{2}{9} + \frac{4}{17} + \frac{1}{4} + \dots$ का n वाँ पद $= \frac{2}{5}$ Ans.

(2.) श्रेणी $4 + 4\frac{2}{7} + 4\frac{8}{13} + 5 + \dots$ का n वाँ पद ज्ञात करें।

हल: $\Rightarrow 4 + 4\frac{2}{7} + 4\frac{8}{13} + \dots$
 $\Rightarrow 4 + \frac{30}{7} + \frac{60}{13} + \dots$

Here, $\frac{1}{4} + \frac{70}{30} + \frac{13}{60} + \dots$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{7}{30} - \frac{1}{4} &= \frac{14-15}{60} = -\frac{1}{60} \\ \frac{13}{60} - \frac{7}{30} &= \frac{13-14}{60} = -\frac{1}{60} \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow \frac{1}{4}, \frac{7}{30}, \frac{13}{60} \dots$ एक शून्य श्रेणी है जहाँ $a = \frac{1}{4}, d = -\frac{1}{60}$

इस श्रेणी का n वाँ पद,

$$T_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + 6 \times \left(-\frac{1}{60}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{5-2}{20} = \frac{3}{20} \dots (i)$$

इस श्रेणी का n वाँ पद,

$$T_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + (n-1)\left(-\frac{1}{60}\right) = \frac{1}{4} - \frac{n-1}{60} + \frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{15-n+1}{60} = \frac{16-n}{60} \dots (ii)$$

समी. (i) तथा (ii) से स्पष्ट है कि दी हुई हरात्मक श्रेणी का

$$\begin{aligned} \text{शतवाँ पद} &= \frac{20}{3} \\ \text{तथा } n \text{ वाँ पद} &= \frac{60}{16-n} \end{aligned}$$

Q No-23. श्रेणी $\frac{6}{5}, 1, \frac{6}{7}, \dots$ का 14 वाँ पद ज्ञात करो।

हल: \rightarrow माना कि इस हरात्मक श्रेणी का 14 वाँ पद x है तथा इसके संगत समान्तर श्रेणी

$$\frac{5}{6}, 1, \frac{7}{6}, \dots \text{ का 14 वाँ पद } \frac{1}{2} \text{ है}$$

अतः, $1 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6} = d$, साथ अन्तर है।

अतः 14 वाँ पद $= \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + (14-1) \times \frac{1}{6}$

[n वाँ पद $= a + (n-1)d$]

$$\Rightarrow \frac{5}{6} + \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{6} = 3$$

अतः अभीष्ट 14 वाँ पद $x = \frac{1}{3}$ किन्तु